Modelagem, similaridade e análise dimensional

Alguns problemas em MF não podem ser resolvidos analiticamente devido a:

- Limitações devido às simplificações necessárias no modelo matemático
  - Falta da informação completa (turbulência);
- Complexidade e custo de se fazer uma análise detalhada.
  - Dificuldade matemática e computacional.

A alternativa mais comum é fazer testes experimentais e procedimentos de verificação.

Sem planejamento e organização, um procedimento experimental pode:

- Ser muito demorado;
- Ser caro

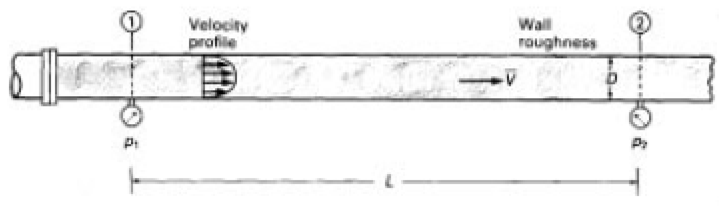
Dois elementos-chave no programa de teste são:

- Projeto da modelagem
- Especificação das condições de teste, particularmente quando o teste deve ser realizado em condições similares, mas não nas mesmas condições de funcionamento do protótipo.

Modelagem, similaridade e análise dimensional

<u>Experimento:</u>

Investigar a queda de pressão, h_d, em um escoamento turbulento em um tubo.



$$h_d \approx \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

- Pode-se afirmar que: $h_d = \boldsymbol{f}(L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon)$ onde ε é a rugosidade do tubo.

- Encontrar a função ***f*** é o objetivo do experimento. ***f*** não necessariamente deve ser expressa por uma função analítica. Tabelas e gráficos são perfeitamente aceitáveis.

- Se variarmos cada parâmetro para 10 medidas diferentes vamos precisar de 1.000.000 de experimentos. Para usarmos os dados dos experimentos, precisamos fazer interpolações entre os **6** parâmetros.

- Para reduzir o número de parâmetros a serem manipulados utilizamos a ANÁLISE DIMENSIONAL

Modelagem, similaridade e análise dimensional

Análise dimensional:

- Uma ferramenta utilizada para reduzir a complexidade de programas experimentais e aumentar a generalidade dos resultados.
- Ajuda nossa forma de pensar e planejar um experimento ou teoria. Sugere novas formas de escrever equações.
- Fornece regras de escalonamento que permitem a conversão de dados entre modelos e protótipos.
- Num escoamento turbulento em tubos:

$$\frac{h_d}{V^2} = F\left(\frac{L}{D}, \frac{\rho V D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Modelagem, similaridade e análise dimensional

Análise dimensional:

Para usar a análise dimensional, fazemos uso do princípio da homogeneidade dimensional: *Qualquer equação que descreve um fenômeno físico deve ser válida independentemente do sistema de unidades das medidas.*

Dimensões de todos os termos que se somam devem ser as mesmas.

Dimensionalmente homogênea:

Equação de Bernoulli :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Não-dimensionalmente homogênea:

Equação de Manning p/ canal aberto:

$$V = \frac{1{,}49}{n} R_n^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}}$$

Nota: Qualquer equação dimensionalmente homogênea pode ser escrito em uma forma adimensional.

Modelagem, similaridade e análise dimensional

<u>Análise dimensional:</u>

$h_d = \boldsymbol{f}(L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon)$ onde h_d representa a perda de energia mecânica.

1. Obtém-se parâmetros importantes para o problema, N parâmetros:
   - Propriedades do escoamento: V, h_d
   - Geometria: L, D, ε
   - Propriedades do fluido: ρ, μ
2. Determina-se o número de parâmetros adimensionais
   - Nº de parâmetros π = N – K
   - K é usualmente igual ao número dimensões básicas usadas para descrever todos os N parâmetros.
   - K também, geralmente é igual ao número de parâmetros que se repetem nos cálculos.
   - Os parâmetros que se repetem não podem formar um grupo adimensional entre si e devem conter todas as k dimensões básicas usadas. Para encontrar estes parâmetros usualmente escolhe-se aqueles cujas dimensões são mais próximas de "puras" quanto possível. Esta é uma arte que envolve conhecimento do experimento (experiência) e tentativa e erro.
3. O restante do procedimento para encontrar os grupos adimensionais π, nós já conhecemos.

Modelagem, similaridade e análise dimensional

<u>Significado físico dos números adimensionais:</u>

Grupos adimensionais π podem ser interpretados como razões entre valores típicos de duas entidades físicas (força ou energia).

Força de inércia:

$$F = ma = \rho L^3 a$$

Desde que V, L e T são velocidade, distância e tempo, podemos escrever:

$$a \approx \frac{V}{T} \approx \frac{V}{\left(\frac{L}{V}\right)} = \frac{V^2}{L}$$

$$\boxed{ma \approx \rho L^3 \frac{V^2}{L} = \rho V^2 L^2}$$

Força viscosa:

$$F_\mu = \mu\left(\frac{dV}{dY}\right) \times A$$

Assumindo um perfil linear de velocidades:

$$\left(\frac{dV}{dY}\right) = \frac{V}{L}$$

$$\boxed{F_\mu \approx \mu\left(\frac{V}{L}\right)L^2 = \mu VL}$$

Note-se que a razão entre:

$$\boxed{\frac{\textit{forçadeinércia}}{\textit{forçaviscosa}} \approx \frac{\rho V^2 L^2}{\mu VL} \approx \frac{\rho VL}{\mu} = \mathrm{Re}}$$

Modelagem, similaridade e análise dimensional

Significado físico dos números adimensionais:

Dimensional Analysis and Similarity

Parameter	Definition	Qualitative ratio of effects	Importance
Reynolds number	$R_E = \frac{\rho U L}{\mu}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Viscosity}}$	Always
Mach number	$MA = \frac{U}{A}$	$\frac{\text{Flow speed}}{\text{Sound speed}}$	Compressible flow
Froude number	$Fr = \frac{U^2}{gL}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}}$	Free-surface flow
Weber number	$W_e = \frac{\rho U^2 L}{\gamma}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Surface tension}}$	Free-surface flow
Cavitation number (Euler number)	$Ca = \frac{p - p_v}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Pressure}}{\text{Inertia}}$	Cavitation
Prandtl number	$Pr = \frac{C_p \mu}{k}$	$\frac{\text{Dissipation}}{\text{Conduction}}$	Heat convection

Modelagem, similaridade e análise dimensional

Modelagem:

O requisito básico neste processo é alcançar a ***similaridade*** entre as condições de teste experimental do modelo e as condições de teste do protótipo no experimento.

Neste contexto, *similaridade* é definida como:

Todos os parâmetros adimensionais relevantes têm os mesmos valores para o modelo e para o protótipo

Para se ter sucesso na modelagem é preciso garantir :

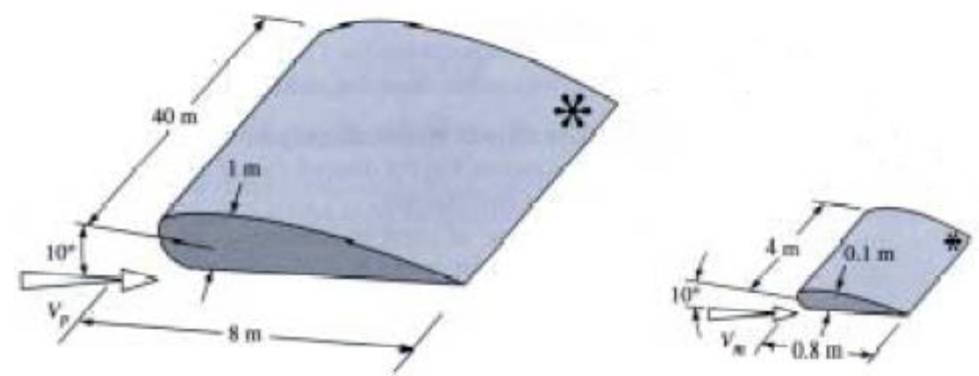
- Similaridade geométrica
- Similaridade cinemática
- Similaridade dinâmica

Modelagem, similaridade e análise dimensional

Modelagem:

Similaridade geométrica:

Todas as dimensões do modelo estão relacionadas às correspondentes dimensões no protótipo por um fator de escala constante.



Ademais, na similaridade geométrica:

- Todos os ângulos são preservados;
- Todas as direções de escoamento são preservadas;
- A orientação com respeito à vizinhança deve ser preservada, ou seja:
  - Ângulo de ataque do modelo = ângulo de ataque do protótipo

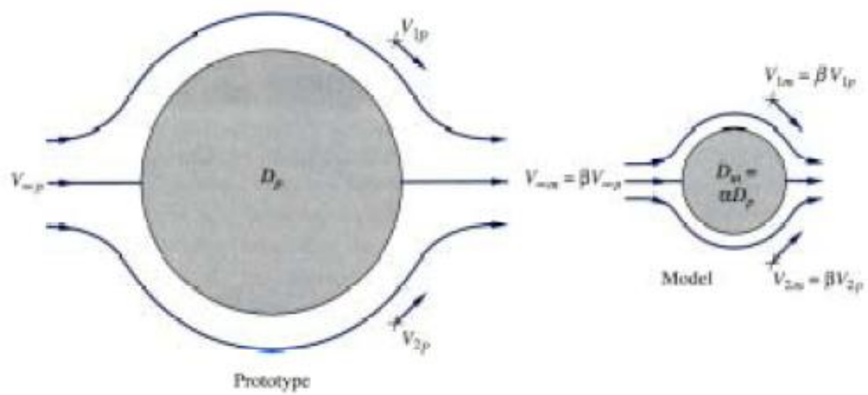
Modelagem, similaridade e análise dimensional

Modelagem:

Similaridade cinemática:

As velocidades nos pontos correspondentes do modelo e do protótipo estão na mesma direção e suas magnitudes diferem por um fator de escala constante.

- Portanto, os escoamentos devem ter padrões similares de linhas de corrente.
- Os regimes de escoamento devem ser os mesmos.



As condições de similaridade cinemática são geralmente encontradas automaticamente quando as condições de similaridade geométrica e similaridade dinâmica são satisfeitas.

Modelagem, similaridade e análise dimensional

Modelagem:

Similaridade dinâmica

Acontece se as forças no modelo e no protótipo diferirem apenas por um fator de escala constante em pontos correspondentes.

Geralmente, a similaridade dinâmica é satisfeita nas seguintes condições:

Para escoamentos compressíveis, o número de Reynolds e o número de Mach devem ser iguais para o modelo e para o protótipo:

$Re_m = Re_p$ e $Ma_m = Ma_p$

Para escoamentos incompressíveis:

- Internos:

  $Re_m = Re_p$

- Com superfície livre:

  $Re_m = Re_p$ e $Fr_m = Fr_p$

Modelagem, similaridade e análise dimensional

Exemplo:

Um modelo de avião foi construído numa escala de 1/10 e será testado em um túnel de vento a uma pressão 20 vezes a atmosférica. O avião (protótipo) irá voar a 500 km/h. Em que velocidade deverá operar o túnel de vento para que haja similaridade dinâmica entre o modelo e o protótipo? Se a força de arrasto, F_D, medida no modelo for de 337,5N qual será o arrasto no protótipo?

Anteriormente fizemos a dedução da equação da força de arrasto sobre um corpo em um escoamento:

$$F_D = \rho V^2 L^2 \phi\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right) = \rho V^2 L^2 \phi(\mathrm{Re})$$

Para que haja similaridade dinâmica:

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p \longrightarrow \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p} \longrightarrow V_m = \frac{\rho_p V_p L_p \mu_m}{\rho_m L_m \mu_p}$$

A equação de estado para um gás ideal é:

$$p v = mRT$$

Como a temperatura é a mesma, a densidade do ar no modelo é obtida assim:

$$\frac{p_m}{p_p} = \frac{\rho_m RT}{\rho_p RT} \longrightarrow \frac{20 p_p}{p_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \longrightarrow \rho_m = 20\rho_p$$

Então, a velocidade é encontrada por:

$$V_m = \frac{\rho_p V_p L_p \mu_m}{\rho_m L_m \mu_p} \longrightarrow V_m = \frac{1}{20}\frac{10}{1}V_p = 0{,}5V_p = 250\,km/h$$

Modelagem, similaridade e análise dimensional

Exemplo:

Um modelo de avião foi construído numa escala de 1/10 e será testado em um túnel de vento a uma pressão 20 vezes a atmosférica. O avião (protótipo) irá voar a 500 km/h. Em que velocidade deverá operar o túnel de vento para que haja similaridade dinâmica entre o modelo e o protótipo? Se a força de arrasto, F_D, medida no modelo for de 337,5N qual será o arrasto no protótipo?

A razão entre as forças no modelo e no protótipo é encontrada por:

$$F_D = \rho V^2 L^2 \phi\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right) = \rho V^2 L^2 \phi(\mathrm{Re})$$

Então:

$$\frac{(F_D)_m}{(F_D)_p} = \frac{(\rho V^2 L^2)_m}{(\rho V^2 L^2)_p} \rightarrow \frac{(F_D)_m}{(F_D)_p} = \frac{20}{1}\frac{(0,5)^2}{1}\frac{(0,1)^2}{1} = 0,05$$

E a força de arrasto no protótipo será:

$$(F_D)_p = \frac{1}{0,05}(F_D)_m = 20 \times 337,5 = 6750\,N$$