Análise Dimensional

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Dado um problema físico no qual o parâmetro dependente é uma função de (*n-1*) parâmetros independentes, podemos expressar a relação entre as variáveis como:

$$q_1 = f(q_2, q_3, \ldots q_n)$$

$$S = f(a, t)$$

Matematicamente, podemos expressar a relação por uma função equivalente:

$$F(q_1, q_2, q_3, \ldots q_n) = 0$$

Análise Dimensional

O teorema dos π de Buckingham:

Dada uma relação entre ***n*** parâmetros da forma acima, então os ***n*** parâmetros podem ser agrupados em ***n-k*** razões independentes adimensionais, ou parâmetros π, que podem ser expressos na forma funcional por:

$$G(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-k}) = 0$$

Ou

$$\Pi_1 = g(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_{n-k})$$

O número **k** é igual ao número de dimensões primárias necessárias para especificar as unidades de todos os parâmetros envolvidos $q_1, q_2, q_3, ... q_n$.

O teorema não prevê a forma funcional de G ou de g. A relação funcional entre os parâmetros adimensionais π, deve ser obtida experimentalmente.

Análise Dimensional

Exemplo: Força de arrasto sobre uma esfera lisa

A força de arrasto, F, sobre uma esfera lisa depende da velocidade relativa, V, do diâmetro da esfera, D, da massa específica do fluido, ρ, e da viscosidade do fluido, μ. Obtenha um conjunto de grupos adimensionais que podem ser usados para correlacionar dados experimentais.

SOLUÇÃO:

Passo 1: *Liste todos os parâmetros envolvidos*. Se todos os parâmetros pertinentes não forem incluídos, uma relação pode ser obtida, mas não fornecerá a história completa. Se houver inclusão de parâmetros que não têm efeito sobre o fenômeno físico em estudo, o processo de análise dimensional mostrará que eles não entram na relação buscada.

$$F = g(V, D, \rho, \mu)$$

Ou

$$G(F, V, D, \rho, \mu) = 0$$

n = 5 parâmetros envolvidos

Análise Dimensional

Exemplo: Força de arrasto sobre uma esfera lisa

Passo 2: *Selecione um conjunto de dimensões primárias*. Por exemplo: MLT ou FLT. Note que para problemas de transferência de calor pode-se precisar de θ (para temperatura), e em sistemas elétricos de q (para carga elétrica).

Selecionemos M, L, T

Passo 3: *Liste as dimensões de todos os parâmetros em termos das dimensões primárias.*

- $F \rightarrow [ML/T^2]$
- $V \rightarrow [L/T]$
- $D \rightarrow [L]$
- $\rho \rightarrow [M/L^3]$
- $\mu \rightarrow [M/LT]$

Portanto, $k = 3$ (número de dimensões primárias utilizadas)

Análise Dimensional

Exemplo: Força de arrasto sobre uma esfera lisa

Passo 4: *Selecione da lista k parâmetros que se repetem (k é igual ao número de dimensões primárias utilizadas no Passo 3) que contenham todas as dimensões primárias utilizadas*. Dois parâmetros que se repetem não podem ter as mesmas dimensões finais, diferindo por apenas um expoente, *p. ex.*: não inclua simultaneamente um comprimento (L) e um momento de inércia de área (L^4) como parâmetros que se repetem. Também não inclua o parâmetro dependente entre aqueles selecionados neste passo.

Selecionemos então:

$$\boxed{\rho \; V \; D}$$

Que se repetirão nos cálculos.

Análise Dimensional

Exemplo: Força de arrasto sobre uma esfera lisa

Passo 5: *Estabeleça equações dimensionais combinando os parâmetros selecionados no Passo 4 com cada um dos outros parâmetros a fim de formar grupos adimensionais.* Resolva as equações dimensionais para obter os *n-k* grupos π adimensionais.

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{T^2}\right) = M^0 L^0 T^0$$

Resolvendo a equação dimensional, avaliando as dimensões:

M $\rightarrow$ a + 1 = 0 — a = - 1

L $\rightarrow$ - 3a + b + c + 1 = 0 — c = - 2

T $\rightarrow$ - b – 2 = 0 — b = - 2

$$\rightarrow \boxed{\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}}$$

Análise Dimensional

Exemplo: Força de arrasto sobre uma esfera lisa

Passo 5: *Estabeleça equações dimensionais combinando os parâmetros selecionados no Passo 4 com cada um dos outros parâmetros a fim de formar grupos adimensionais.* Resolva as equações dimensionais para obter os *n-k* grupos π adimensionais.

$$\Pi_2 = \rho^a V^b D^c \mu = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b (L)^c \left(\frac{M}{LT}\right) = M^0 L^0 T^0$$

Resolvendo a equação dimensional, avaliando as dimensões:

M → a + 1 = 0	a = - 1		
L → - 3a + b + c - 1 = 0	c = - 1	→	$\boxed{\Pi_2 = \dfrac{\mu}{\rho V D}}$
T → - b – 1 = 0	b = - 1		

Passo 6: *Tire a prova. Verifique se os grupos obtidos são realmente adimensionais.*

Análise Dimensional

Exemplo: Força de arrasto sobre uma esfera lisa

Conclusão: Então, de acordo com o Teorema dos π de Buckingham, podemos afirmar que:

$$G\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}, \frac{\mu}{\rho V D}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{F = \rho V^2 D^2 g\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)}$$

Análise Dimensional

CORRELAÇÃO DE DADOS EXPERIMENTAIS:

Correlacionamento dos dados experimentais de transmissão de calor por convecção no caso de um fluido em escoamento transversal relativamente a um cilindro.

Alguém imaginou que os seguintes parâmetros influenciariam no coeficiente de transferência de calor por convecção, $\bar{h}$:

Parâmetros envolvidos	Símbolo	Dimensões
Diâmetro do tubo	D	L
Condutividade térmica do fluido	k_f	ML/θ^3T
Velocidade do fluido	V	L/θ
Densidade do fluido	ρ	M/L^3
Viscosidade do fluido	μ	$M/L\theta$
Calor específico à pressão constante	c_P	L^2/θ^2T^2

Ou

$$\bar{h} = f\,(D, k_f, V, \rho, \mu, c_P)$$

Análise Dimensional

CORRELAÇÃO DE DADOS EXPERIMENTAIS:

A função = f $(D, k_f, V, \rho, \mu, c_P)$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$F(\bar{h}, D, k_f, V, \rho, \mu, c_P) = 0$

n = 7 parâmetros

k = 4 dimensões

E portanto obteremos (n - k) parâmetros adimensionais, neste caso,

7 - 4 = 3 parâmetros adimensionais.

Para este fim, escolhemos <u>quatro</u> parâmetros que se repetem (o número de dimensões utilizadas para descrever os parâmetros envolvidos):

$K_f \; D \; \mu \; V$

Análise Dimensional

CORRELAÇÃO DE DADOS EXPERIMENTAIS:

E calculamos as razões adimensionais da seguinte forma:

O primeiro, que envolve o coeficiente de convecção, $\bar{h}$:

$$\Pi_1 = k_f^a D^b \mu^c V^d \bar{h} = \left(\frac{ML}{\theta^3 T}\right)^a L^b \left(\frac{M}{L\theta}\right)^c \left(\frac{L}{\theta}\right)^d \left(\frac{M}{\theta^3 T}\right) = M^0 L^0 T^0 \theta^0$$

M $\rightarrow$ a + c + 1 = 0

L $\rightarrow$ a + b - c + d = 0

T $\rightarrow$ -a - 1 = 0

θ $\rightarrow$ -3a - c - d - 3 = 0

resolvendo o sistema de equações:

a = -1 b = 1 c = 0 d = 0, e voltando à equação acima:

$$\boxed{\Pi_1 = k_f^{-1} D^1 \bar{h} = \frac{D\bar{h}}{k_f}}$$

(número de Nusselt)

Análise Dimensional

CORRELAÇÃO DE DADOS EXPERIMENTAIS:

Do mesmo modo podemos calcular as outras duas razões adimensionais:

$$\Pi_2 = \frac{VD\rho}{\mu}$$ (número de Reynolds)

e

$$\Pi_3 = \frac{c_P \mu}{k_f}$$ (número de Prandtl)

Então:

$$F\left(\overline{N}u, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right) = 0$$ ou $$\overline{N}u = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right)$$

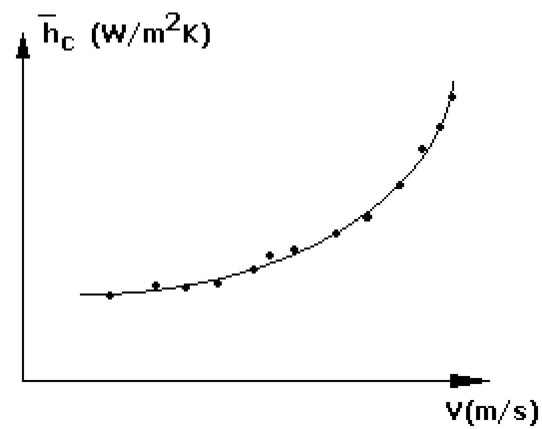
Embora sofra influência de seis variáveis, com a ajuda da análise dimensional as sete variáveis foram combinadas em três grupos adimensionais. Portanto, os dados experimentais podem ser correlacionados em termos de <u>três</u> variáveis em vez das <u>sete</u> originais.

Análise Dimensional

CORRELAÇÃO DE DADOS EXPERIMENTAIS:

Experimento:

Ar escoando sobre um tubo de 25,4mm de diâmetro externo. Mediu-se para velocidades variando de 0,03 a 30,48m/s.

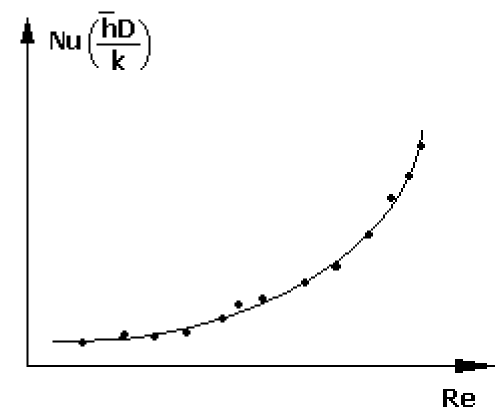


A curva permite a determinação de $\overline{h}$ para qualquer velocidade no caso acima. Porém, não vale para cilindros maiores ou menores, ou se o ar estiver sob pressão, sua densidade for diferente...

Análise Dimensional

CORRELAÇÃO DE DADOS EXPERIMENTAIS:

Se os dados forem reapresentados em termos de grupos adimensionais pertinentes os resultados dos testes podem ser aplicados a vários outros problemas.

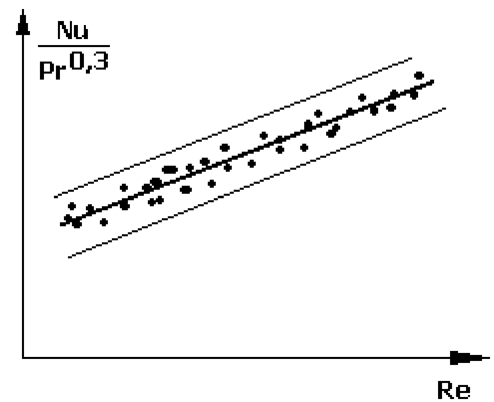


Esta correlação permite a avaliação de $\bar{h}$ para o ar escoando sobre um tubo ou fio de qualquer diâmetro.

Análise Dimensional

CORRELAÇÃO DE DADOS EXPERIMENTAIS:

Em um gráfico log x log (Kreith (1977), pág 261) pode-se mostrar resultados para ar, água e óleos em escoamento sobre tubos e fios para um grande intervalo de temperaturas, diâmetros e velocidades.



A inclinação da linha reta é aproximadamente igual a 0,4 e o valor para Re = 1 é 0,82.

A equação de correlação empírica seria portanto:

$$\frac{\overline{Nu}}{\mathrm{Pr}^{0,3}} = 0{,}82\,\mathrm{Re}^{0,4}$$

E, para escoamentos de fluido cruzado sobre tubos seria razoável avaliarmos o coeficiente de transferência de calor por:

$$Nu = f\,(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$$

A partir da Análise Dimensional

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h}D}{k} = 0{,}82\,\mathrm{Re}^{0,4}\,\mathrm{Pr}^{0,3}$$

Após os dados experimentais