Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

Quando queremos obter parâmetros do movimento (seja de sólidos ou fluidos) aplicamos o princípio de ***conservação de energia*.**

- Quando desprezamos o atrito:

A soma da energia cinética e da energia potencial gravitacional é constante

Energia cinética = $\frac{1}{2}mv^2$

Energia potencial gravitacional = mgh

Onde:

m é a massa,

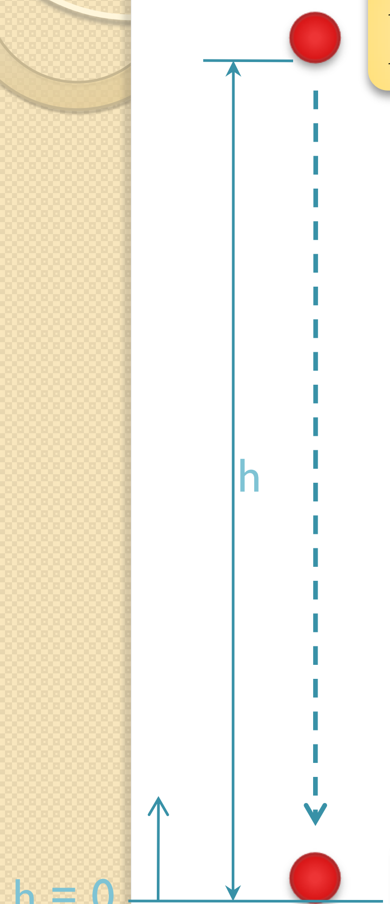
v é a velocidade e

h é a altura em relação a um referencial.

Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

Quando estudamos a queda de uma bola, com velocidade inicial zero, de uma certa altura h, fazemos:

$$E_{cinética} = 0$$
$$E_{potencial} = mgh$$



$$E_{cinética} = \frac{1}{2}mv^2$$
$$E_{potencial} = 0$$

Sabemos que:

$$E_{cinética} + E_{potencial} = cte$$

Então, para os instantes inicial e final:

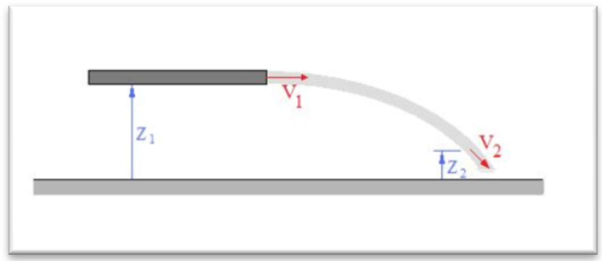
$$E_{cinética\_inicial} + E_{potencial\_inicial} = E_{cinética\_final} + E_{potencial\_final}$$

Portanto:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

Um método similar pode ser aplicado quando estudamos um jato contínuo de liquido:



Uma partícula de liquido de massa *m* 'viaja' com o jato e cai de uma altura z_1 para z_2. A velocidade também varia de V_1 para V_2. O jato está atravessando o ar onde em todo o seu percurso a pressão é atmosférica então não há forças de pressão atuando no fluido. A única força atuante é a gravitacional. A soma da energia cinética e potencial permanece constante (desde que desprezamos as perdas de energia por fricção), então:

$$mgz_1 + \frac{1}{2}mV_1^2 = mgz_2 + \frac{1}{2}mV_2^2$$

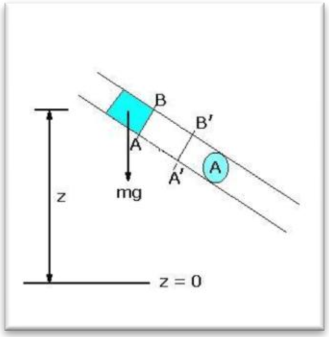
Massa constante

$$gz_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = gz_2 + \frac{1}{2}V_2^2$$

Esta expressão fornece resultados precisos na medida em que o peso do jato é grande comparado com as perdas por fricção. A expressão é aplicável enquanto há um comportamento de jato, antes dele se quebrar em gotículas de água.

Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

Imaginemos agora um elemento de fluido escoando no interior de um duto.



Um elemento de fluido tem energia potencial devido à altura z em relação a um referencial. E também tem energia cinética devido à sua velocidade V.

Se o elemento tem peso *mg*, então:

Energia potencial: mgz	por unidade de peso: z
Energia cinética: $\frac{1}{2}mV^2$	por unidade de peso: $\frac{V^2}{2g}$
Trabalho realizado $\frac{pm}{\rho}$	por unidade de peso: $\frac{p}{\rho g}$

Em qualquer seção reta a pressão gera uma força, o fluido escoa, movendo-se através da seção e então trabalho é realizado.

Se a pressão na seção AB é p e a área da seção é A então

Força em AB = pA

Quando a massa mg do elemento de fluido passar por AB, a seção frontal do elemento estará em A'B' então:

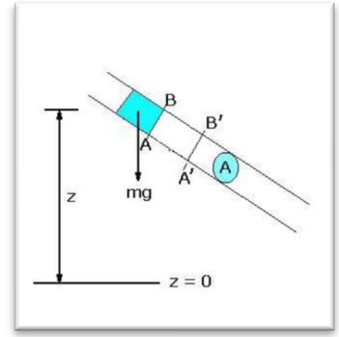
Volume que passa por AB = $\frac{m}{\rho}$

Distância AA' = $\frac{m}{\rho A}$

Trabalho realizado = Força x distância AA' = $pA \times \frac{m}{\rho A} = \frac{pm}{\rho}$

Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

Imaginemos agora um elemento de fluido escoando no interior de um duto.



Um elemento de fluido tem energia potencial devido à altura z em relação a um referencial. E também tem energia cinética devido à sua velocidade V.

Se o elemento tem peso *mg*, então:

Energia potencial: mgz — por unidade de peso: z

Energia cinética: $\frac{1}{2}mV^2$ — por unidade de peso: $\frac{V^2}{2g}$

Trabalho realizado: $\frac{pm}{\rho}$ — por unidade de peso: $\frac{p}{\rho g}$

Somando todos os termos teremos:

$$E_{pressão} + E_{cinética} + E_{potencial} = E_{total}$$

ou

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H$$

Pelo princípio da conservação de energia, a energia total em um sistema não varia, então a equação acima pode ser escrita:

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H = cte$$

Ou, finalmente:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

Equação de Bernoulli !

Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+z=H=cte$$

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2$$

A equação de Bernoulli tem algumas restrições em sua aplicabilidade:

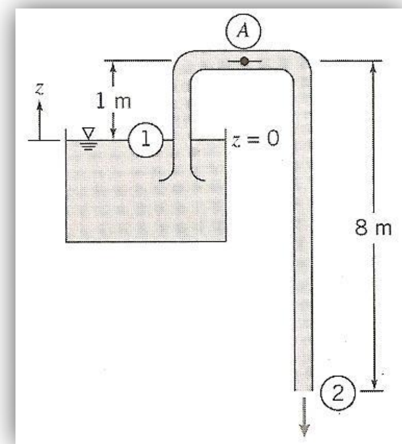
- Escoamento permanente.
- Fluido incompressível (densidade constante)
- Perdas de atrito desprezíveis.
- A equação relaciona os estados entre dois pontos ao longo de uma mesma linha de corrente.

Todas estas condições são impossíveis de satisfazer em qualquer instante de tempo. Por sorte, para muitas situações reais onde as condições são *aproximadamente* satisfeitas, a equação dá bons resultados.

Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

Exemplo:

Um tubo em U atua como um sifão de água. A curvatura no tubo está a um metro da superfície da água; a saída do tubo está sete metros abaixo. A água sai pela extremidade inferior do sifão como um jato livre para a atmosfera. Determine a velocidade do jato livre e a pressão absoluta mínima da água na curvatura.



$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2$$

$P_1 = P_2 = P_{atm}$

Como a área do reservatório é muito maior que a área do sifão, $V_1 = 0$.

Se considerarmos o referencial em Z_1, então $Z_1 = 0$

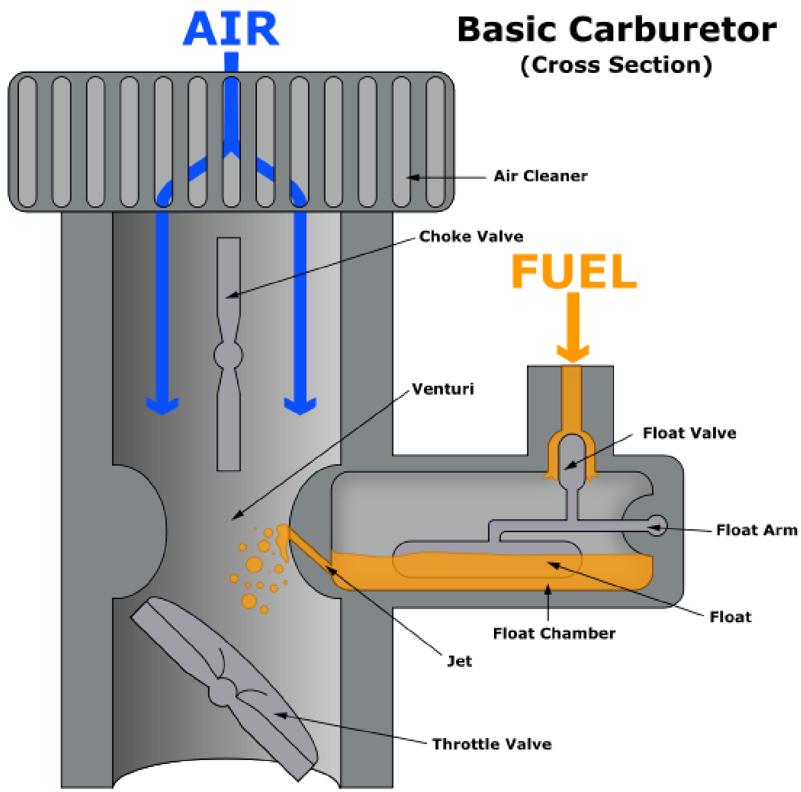
$$\cancel{\frac{p_1}{\rho}}+\cancelto{0}{\frac{v_1^2}{2}}+\cancelto{0}{gz_1}=\cancel{\frac{p_2}{\rho}}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2 \Rightarrow v_2^2=-2gz_2 \Rightarrow v_2=\sqrt{-2(9,81)(-7)}=11,7\frac{m}{s}$$

Para sabermos a pressão no ponto A aplicamos Bernoulli de (1) a (A):

$$\cancelto{0}{\frac{p_1}{\rho}}+\cancelto{0}{\frac{v_1^2}{2}}+\cancelto{0}{gz_1}=\frac{p_A}{\rho}+\frac{v_A^2}{2}+gz_A \Rightarrow p_A=-\rho\left(\frac{v_A^2}{2}+gz_A\right)=-1000\left(\frac{11,7^2}{2}+9,81\times 1\right)=-78,25\times 10^3\,Pa=-78,25kPa$$

(manométrica)

Carburador



Bernoulli e Motores

Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

Exemplo:

Consideremos um vaso com água, com um orifício por onde a água escoa. Como aplicação da equação de Bernoulli vamos calcular o módulo da velocidade com que a água escoa pelo orifício. Tomando os pontos 1 e 2 mostrados:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gH=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+g\left(\frac{1}{2}H+z\right)$$

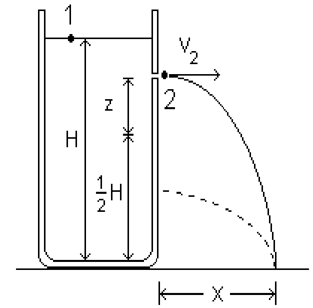


Fig.19

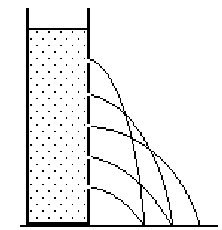


Fig. 20

Considerando o volume de água como muito grande, pode-se ignorar a velocidade com que o nível de água do vaso baixa se comparada à velocidade com que a água escoa pelo orifício , e como temos $P_1 = P_2 = P_{atm}$

$$gH=\frac{v_2^2}{2}+g\left(\frac{1}{2}H+z\right) \quad \text{ou} \quad v_2=\sqrt{2g\left(\frac{1}{2}H-z\right)}$$

Este resultado era esperado da cinemática e de estarmos tratando com fluidos ideais. Por outro lado, como o tempo de queda da água é dado pela expressão:

$$t=\sqrt{\frac{2}{g}\left(\tfrac{1}{2}H+z\right)}$$

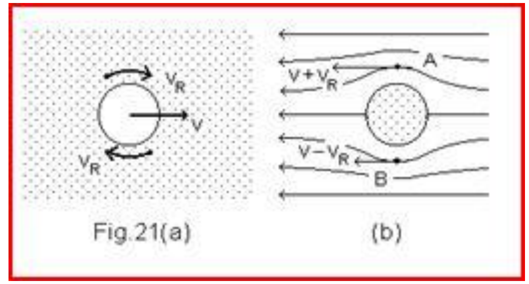
a distância x (Fig.19), dada por $x = v_2 t$, fica:

$$x=\sqrt{4\left(\tfrac{1}{2}H-z\right)\left(\tfrac{1}{2}H+z\right)}$$

Este resultado mostra que existem sempre duas alturas do orifício para o mesmo alcance (Fig.20).

Escoamento incompressível de fluidos não viscosos

O chute folha seca.



Uma bola se desloca no ar com velocidade (do centro de gravidade, em relação ao ar) de módulo v e, além disso, gira ao redor do centro de gravidade com uma velocidade linear (da superfície) de módulo v_R (Fig.21(a)). Como a bola não é perfeitamente lisa, arrasta consigo uma certa quantidade de ar.

Num referencial fixo no centro de gravidade da bola (Fig.21(b)), a linha de corrente que passa pelo ponto A tem velocidade de módulo $v_A = v + v_R$ e a linha de corrente que passa pelo ponto B, uma velocidade de módulo $v_B = v - v_R$. Para estes pontos, supostos a mesma altura, a equação de Bernoulli fornece:

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}$$

ou

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2}\left(v_A^2 - v_B^2\right)$$

e como $V_A > V_B$ temos $P_B - P_A > 0$ ou $P_B > P_A$. Assim, existe uma força resultante que empurra a bola de B para A.