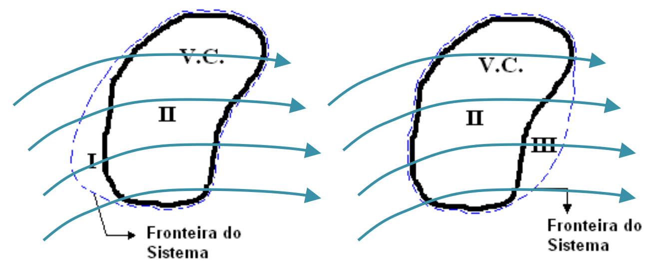
Hidrodinâmica

FORMA INTEGRAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE (CONSERVAÇÃO DE MASSA):

- Considere um Volume de Controle indeformável (Região II)
- A Região I é definida de tal forma que sua massa entra no V.C. no intervalo de tempo Δt e a Região III é formada pela massa que sai do V.C. no mesmo intervalo de tempo.
- Por definição, a massa do Sistema é constante.



(a) Instante t (b) instante t+Δt

$$m_{I,t} + m_{II,t} = m_{II,t+\Delta t} + m_{III,t+\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{II,t+\Delta t} - m_{II,t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{I,t} - m_{III,t+\Delta t}}{\Delta t}$$

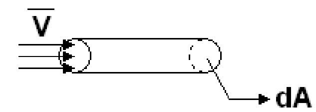
$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \dot{m}_{entra} - \dot{m}_{sai}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int \rho dV = \dot{m}_{entra} - \dot{m}_{sai}} \qquad [\,i\,]$$

Hidrodinâmica

FORMA INTEGRAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE (CONSERVAÇÃO DE MASSA):

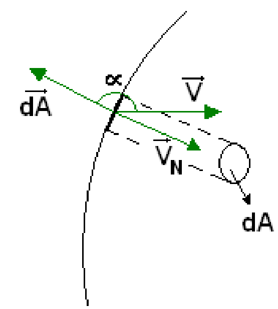
Quando queremos determinar a vazão em volume (Q [m³/s]) de um escoamento pelo interior de um tubo, basta que multipliquemos a velocidade média do fluido pela área de seção do tubo:



$$Q = V\left[\frac{m}{s}\right] \times A\left[m^2\right] = Q\left[\frac{m^3}{s}\right]$$

No caso de um tubo, o escoamento é sempre perpendicular à área de seção do mesmo.

Imaginemos agora uma pequena área diferencial, dA, circular, na superfície de controle:



A vazão normal à superfície é dada por:

$V_N \left| d\vec{A} \right|$ ou $\vec{V} \cdot d\vec{A}$

$d\vec{A}$ é definido como o vetor normal à superfície com módulo igual à área diferencial dA e sempre apontando para fora do volume de controle.

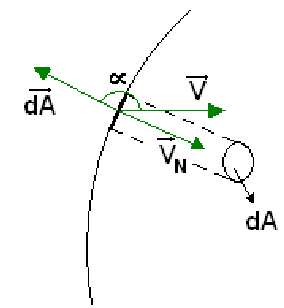
Hidrodinâmica

FORMA INTEGRAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE (CONSERVAÇÃO DE MASSA):

Então:

$$\dot{m}_{entra} = -\int_{A.entrada} \rho V \cos\alpha dA$$

pois, o cosα, quando o escoamento é para o interior da Superfície de controle, será sempre negativo (α > 90°).



$$\dot{m}_{sai} = \int_{A.saida} \rho V \cos\alpha dA$$

Pois, neste caso, o cosα é sempre positivo.

Voltando à equação $\boxed{\frac{d}{dt}\int \rho dV = \dot{m}_{entra} - \dot{m}_{sai}}$ [i]:

$$\frac{d}{dt}\int_{V.C.} \rho d\nu = -\int_{A.entrada} \rho V \cos\alpha dA - \int_{A.saida} \rho V \cos\alpha dA$$

Chegamos à forma integral da Equação da Continuidade:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V.C} \rho d\nu = -\int_{S.C} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}$$

Se o escoamento for PERMANENTE, a massa total dentro do V.C. é constante e independe do tempo, portanto:

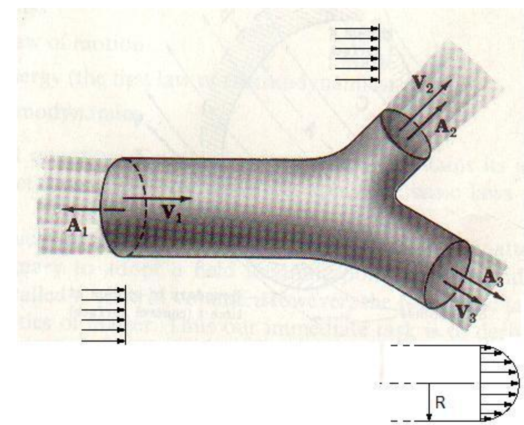
$$\dot{m}_{entra} = \dot{m}_{sai}$$

Hidrodinâmica

FORMA INTEGRAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE (CONSERVAÇÃO DE MASSA):

EXERCÍCIO:
Um fluido incompressível escoa de modo permanente através do duto com duas saídas. O perfil de velocidades é reto nas seções 1 e 2, porém é parabólico na seção 3. Calcule a velocidade V_1.
Dados:
$A_1 = 3ft^2$; $A_2 = 2\ ft^2$; $A_3 = 1 ft_2$; $V_2 = 1 ft/s$

$$V_3 = 4\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{ft}{s}$$



Escoamento permanente: $\Rightarrow \int_{S.C} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$

$$0\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$$

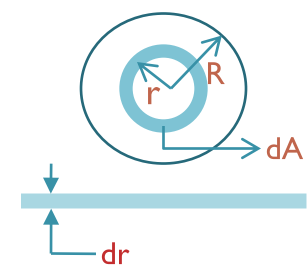
$$\int_{S.C} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_1 \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_2 \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_3 \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_4 \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\int_1 \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_2 \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_3 \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$(\alpha = \pi) \Rightarrow \int_1 \vec{V} \cdot d\vec{A} = -V_1 A_1 = -3V_1$$

$$(\alpha = 0) \Rightarrow \int_2 \vec{V} \cdot d\vec{A} = V_2 A_2 = 2$$

$$\int_3 \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_3 V_3 2\pi r dr$$



$$\int_3 \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_0^R 4\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = 8\pi \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = 2\pi R^2$$

$$-3V_1 + 2 + 2\pi R^2 = 0$$

$$\boxed{V_1 = \frac{4}{3}\frac{ft}{s}}$$

Hidrodinâmica

Relembrando, quando estudamos a dinâmica de corpos rígidos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}$$

$\vec{P} = m\vec{V}$ *É O MOMENTO (OU QUANTIDADE DE MOVIMENTO).*

TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS:

Seja N, a magnitude de uma propriedade física presente em um meio material contínuo. Se esta propriedade está sendo transportada pela ação do escoamento do material, com velocidade $\vec{V}$, então, o Teorema do Transporte de Reynolds afirma que *a taxa de variação com o tempo da quantidade total de N é igual às variações instantâneas de N no interior do volume de controle, somadas à integral (em toda a superfície de controle) da taxa na qual N está sendo transportada através da superfície* *<u>de</u>* e *<u>para</u>* *a vizinhança.*

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\upsilon + \int_{SC} \eta\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$\eta \Rightarrow$ é a propriedade intensiva, correspondente a N, igual a N por unidade de massa.

Hidrodinâmica

Se considerarmos a massa, M, como sendo a propriedade N. Então teremos:

$$N = M \qquad \left.\frac{dM}{dt}\right|_{sistema} = 0 \qquad \eta = \frac{M}{M} = 1$$

Aplicando o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\upsilon + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\upsilon + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V.C} \rho d\nu = -\int_{S.C} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Que é a forma integral da Equação da Continuidade (conservação de massa)!

Hidrodinâmica

Se considerarmos o momento, $\vec{P} = m\vec{V}$, como sendo a propriedade N. Então teremos:

$$N = \vec{P} = m\vec{V} \qquad \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{sistema} = \vec{F} \qquad \eta = \frac{m\vec{V}}{m} = \vec{V}$$

Aplicando o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\boxed{\left.\frac{dN}{dt}\right|_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\upsilon + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}$$

$$\Downarrow$$

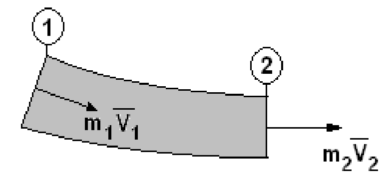
$$\boxed{\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho d\upsilon + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}$$

Lembrado-nos que: $\rho AV = \dot{m}$

Hidrodinâmica

Consideremos o Volume de Controle ao lado, que tem uma entrada (seção (1)) e uma saída (seção (2)). O escoamento transmite momento para dentro e para fora do V.C.

Em regime permanente, a força resultante que atua sobre o V.C. é igual à diferença entre as taxas de momento saindo e entrando no V.C. que acompanham o fluxo de massa.



0 (escoamento permanente)

$$\vec{F} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho d\upsilon} + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{F} = \dot{m}\vec{V}_2 - \dot{m}\vec{V}_1 = \dot{m}\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)}$$

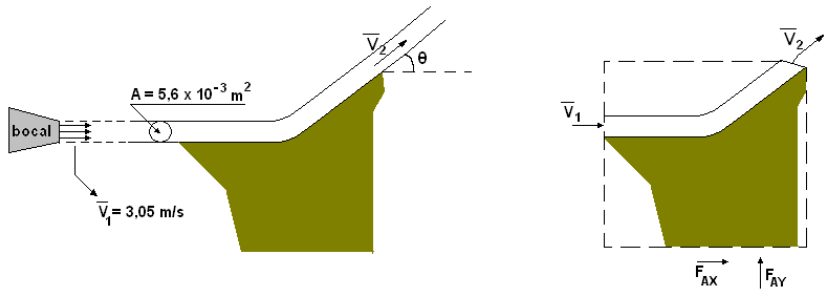
Em regime permanente: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$

A Equação do Momento é uma equação vetorial. As componentes *x, y* e z de F são F_x, F_y e F_z. As componentes da velocidade são *u, v* e *w*. A vazão mássica (em massa) é dada por:

$$\dot{m} = \rho A V$$

Hidrodinâmica

EXEMPLO:



Um jato de água sai de um bocal com velocidade uniforme V = 3,05 m/s, atinge a superfície plana de um defletor e é desviado em um ângulo θ. Determine a força de ancoragem necessária para manter o defletor parado, em função de θ.

HIPÓTESES:

Regime permanente;

Água é incompressível (ρ = 1000 kg/m³);

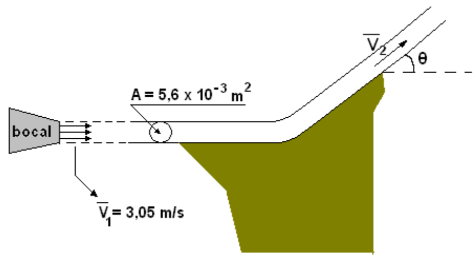
A pressão é a atmosférica em todo o V.C.

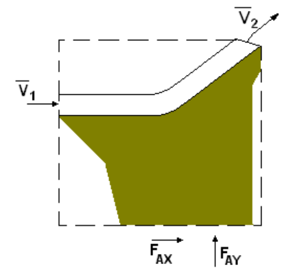
Para o V.C. do lado direito da figura, as componentes x e y da equação do momento ficam:

$$\sum F_X = \dot{m}(u_2 - u_1) \qquad \sum F_Y = \dot{m}(v_2 - v_1)$$

Hidrodinâmica

EXEMPLO:





Uma vez que a pressão é a atmosférica em toda a superfície de controle, a força total líquida de pressão é nula. Então o somatório de forças em cada eixo x e y se resume às forças de ancoragem F_{AX} e F_{AY}:

$$F_{AX} = \dot{m}(V\cos\theta - V) = -\dot{m}V(1-\cos\theta)$$

$$F_{AY} = \dot{m}(Vsen\theta - 0) = \dot{m}Vsen\theta$$

Como $\dot{m} = \rho \cdot A \cdot V$

$$F_{AX} = -\rho AV^2(1-\cos\theta)$$

$$F_{AY} = \rho AV^2 sen\theta$$

Substituindo os valores:

$$F_{AX} = -(1000)(5{,}6\times10^{-3})(3{,}05^2)(1-\cos\theta) = -52{,}1(1-\cos\theta)[N]$$

$$F_{AY} = 52{,}1(sen\theta)[N]$$

O sinal negativo de F_{AX} indica que a componente horizontal da força de ancoragem é exercida para a esquerda.

Hidrodinâmica

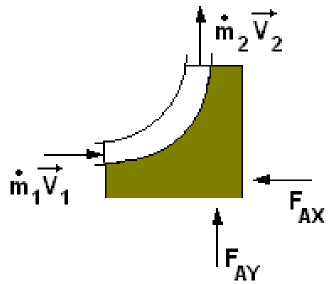
EXEMPLO:

$$F_{AX} = -(1000)(5{,}6\times10^{-3})(3{,}05^2)(1-\cos\theta) = -52{,}1(1-\cos\theta)[N]$$

$$F_{AY} = 52{,}1(sen\theta)[N]$$

Se θ = 90°, as forças seriam:

F_{AX} = - 52,1N e F_{AY} = 52,1N



Assim, conforme a figura, a força de ancoragem deve se opor ao momento do fluido entrando no V.C. e fornecer o momento de saída.

Já se θ = 180°, o jato retorna e as forças serão:

F_{AX} = -104,2N e F_{AY} = 0